Title	Associative binary operators for quadratic rational maps (Computer Algebra : Design of Algorithms, Implementations and Applications)
Author(s)	西沢, 清子; 尾身, 和馬
Citation	数理解析研究所講究録 (2004), 1395: 171-177
Issue Date	2004-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/25944
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1395 巻 2004 年 171-177

Associative binary operators for quadratic rational maps

西沢 清子
NISHIZAWA, KIYOKO
城西大学理学部
JOSAI UNIV., DEPT.MATH. *

尾身 和馬
OMI, KAZUMA
城西大学大学院
JOSAI UNIV., DEPT.MATH. †

1 序

本論文は、S. Northshield の最近の論文 [1], [2] の紹介である。ここでは、$\mathbb{C}$ 上に 2 項間作用素を導入し、この作用素についてみる。この制限でもリー群の例として意味があることに注意しておく。

2 2次有理関数と作用素 $\oplus$

定義 1
微分可能な関数 $f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ と 任意の $x,\ y\in\overline{\mathbb{C}}$ に対して作用素 $\oplus$ を次のように定義する：

$$x\oplus y=\frac{xf(y)-yf(x)}{f(y)-f(x)}$$

$x=y$ のときは、次のように定義する:

$$\lim_{y\to x}x\oplus y=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

2.1 作用素 $\oplus$ の結合律

$a,\ b,\ c,\ d,\ e\ \in\mathbb{R}$ に対して $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ とし、a,d が同時に 0 をとらないとする。

命題 2
2 次有理関数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ に付随する作用素 $\oplus$ は、結合律を満たす。

注意 1
2 次有理関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx^2+dx+e}$ の形、2 次有理関数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ の形ならば、関数 $f(x)$ の付随する作用素 $\oplus$ は、結合律を満たさない。

*kiyoko@math.josai.ac.jp
†mm0202@math.josai.ac.jp

2.2 作用素 $\oplus$ の微分可能性

定理 3

$p(x) = ax^2 + bx + c$ とする。2 次有理関数 $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ に付随する作用素 $\oplus$ は、微分可能であって次式を満たす：

$$\frac{\partial}{\partial x}(x \oplus y) = \frac{p(x \oplus y)}{p(x)}$$

証明 $s(x,\ y) = \dfrac{f(x)}{x - x \oplus y} = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ とする。2 次有理関数 $f(x)$ ならば $\iota = -\dfrac{e}{d}$, 2 次多項式 $f(x)$ ならば $\iota = \infty$ とする。どちらの場合においても $f(\iota) = \infty$ となり

$$\lim_{z \to \iota} x \oplus z = x.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(x \oplus y) &= \lim_{z \to \iota} \frac{x \oplus y - x \oplus y \oplus z}{x - x \oplus z} = \lim_{z \to \iota} \frac{x \oplus y - x \oplus y \oplus z}{f(x \oplus y)} f(x \oplus y) \frac{f(x)}{x - x \oplus z} \frac{1}{f(x)} \\
&= \lim_{z \to \iota} \frac{s(x,\ z)}{s(x \oplus y,\ z)} \frac{f(x \oplus y)}{f(x)} = \frac{f(x \oplus y)}{f(x)} \lim_{z \to \iota} \frac{s(x,\ z)}{s(x \oplus y,\ z)}
\end{aligned}$$

$$\lim_{z \to \iota} \frac{s(x,\ z)}{s(x \oplus y,\ z)} = \lim_{z \to \iota} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \frac{x \oplus y - z}{f(x \oplus y) - f(z)} = \lim_{z \to \iota} \frac{f(x) - f(z)}{f(x \oplus y) - f(z)} \frac{x \oplus y - z}{x - z}$$

- 関数 $f(x)$ が 2 次有理関数のとき $\iota = -\dfrac{e}{d}$, $f(-\frac{e}{d}) = \infty$ より

$$\lim_{z \to \iota} \frac{f(x) - f(z)}{f(x \oplus y) - f(z)} = \lim_{z \to \iota} \frac{\frac{f(x)}{f(z)} - 1}{\frac{f(x \oplus y)}{f(z)} - 1} = 1.$$

よって
$$\lim_{z \to \iota} \frac{s(x,\ z)}{s(x \oplus y,\ z)} = \lim_{z \to \iota} \frac{x \oplus y - z}{x - z} = \frac{x \oplus y + \frac{e}{d}}{x + \frac{e}{d}}.$$

$\dfrac{p(x)}{d} = f(x)(x + \dfrac{e}{d})$ より
$$\frac{\partial}{\partial x}(x \oplus y) = \frac{f(x \oplus y)}{f(x)} \frac{x \oplus y + \frac{e}{d}}{x + \frac{e}{d}} = \frac{p(x \oplus y)}{p(x)}.$$

- 関数 $f(x)$ が 2 次多項式のとき $\iota = \infty$, $f(\infty) = \infty$ より

$$\lim_{z \to \iota} \frac{f(x) - f(z)}{f(x \oplus y) - f(z)} = \lim_{z \to \iota} \frac{\frac{f(x)}{f(z)} - 1}{\frac{f(x \oplus y)}{f(z)} - 1} = 1.$$

よって
$$\lim_{z \to \iota} \frac{s(x,\ z)}{s(x \oplus y,\ z)} = \lim_{z \to \iota} \frac{x \oplus y - z}{x - z} = 1.$$

$\dfrac{p(x)}{d} = f(x)$ より
$$\frac{\partial}{\partial x}(x \oplus y) = \frac{f(x \oplus y)}{f(x)} = \frac{p(x \oplus y)}{p(x)}.$$

∎

2.3 メビウス変換

定理 4

2 次有理関数 $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e} = \dfrac{p(x)}{dx + e}$ に付随する作用素 $\oplus$ に対して、関数 $x \oplus k$ は、メビウス変換である。

証明 $m(x)=x\oplus k$ のシュワルツ微分 $S(m(x))=\left(\dfrac{m''(x)}{m'(x)}\right)'-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m''(x)}{m'(x)}\right)^2=0$ を計算する。

$$m'(x)=\frac{\partial}{\partial x}(x\oplus k)=\frac{p(x\oplus k)}{p(x)}=\frac{p\circ m(x)}{p(x)}$$

$$\begin{aligned} m''(x) &= \frac{m'(x)p'\circ m(x)p(x)-p'(x)p\circ m(x)}{\{p(x)\}^2}=\frac{p\circ m(x)p'\circ m(x)-p\circ m(x)p'(x)}{(p(x))^2} \\ &= \frac{p\circ m(x)}{p(x)}\left(\frac{p'\circ m(x)-p'(x)}{p(x)}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{m''(x)}{m'(x)} &= \frac{p\circ m(x)}{p(x)}\left(\frac{p'\circ m(x)-p'(x)}{p(x)}\right)\left(\frac{p(x)}{p\circ m(x)}\right)=\frac{p'\circ m(x)-p'(x)}{p(x)} \\ \left(\frac{m''(x)}{m'(x)}\right)' &= \frac{p(x)(p''\circ m(x)m'(x)-p''(x))-p'(x)(p'\circ m(x)-p'(x))}{(p(x))^2} \\ \left(\frac{m''(x)}{m'(x)}\right)^2 &= \frac{(p'\circ m(x))^2-2p'(x)p'\circ m(x)+(p'(x))^2}{(p(x))^2} \end{aligned}$$

これらをシュワルツ微分 $S(m(x))$ に代入すると

$$\begin{aligned} S(m(x)) &= \frac{p(x)(p''\circ m(x)m'(x)-p''(x))-p'(x)(p'\circ m(x)-p'(x))}{(p(x))^2} \\ &\quad -\frac{1}{2}\left\{\frac{(p'\circ m(x))^2-2p'(x)p'\circ m(x)+(p'(x))^2}{(p(x))^2}\right\} \\ &= \frac{p\circ m(x)p''\circ m(x)-\frac{1}{2}(p'\circ m(x))^2-\{p''(x)p(x)-\frac{1}{2}(p'(x))^2\}}{(p(x))^2}. \end{aligned}$$

ここで $q(x)=p(x)p''(x)-\dfrac{1}{2}(p'(x))^2$ とすると

$$S(m(x))=\frac{q\circ m(x)-q(x)}{(p(x))^2}.$$

$p(x)=ax^2+bx+c$ より　　$p'(x)=2ax+b,\ p''(x)=2a.$

$$q(x) = 2a(ax^2+bx+c)-\frac{1}{2}(2ax+b)^2=2ac-\frac{1}{2}b^2$$

$$q\circ m(x)-q(x)=(2ac-\frac{1}{2}b^2)-(2ac-\frac{1}{2}b^2)=0.$$

よって

$$S(m(x))=\frac{q\circ m(x)-q(x)}{(p(x))^2}=0$$

より $m(x)=x\oplus k$ は、メビウス変換である。 ∎

2.4 群

$Z(f)=\{x:f(x)=0\}$ とし、$G=\overline{\mathbb{C}}-Z(f)$ とする。そのとき G は、2次有理関数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ に付随する作用素 $\oplus$ のもとで閉である。

命題 5
2 次有理関数 $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ に付随する作用素 $\oplus$ によって G は、アーベル群である。

証明

- 結合律については、命題 2 より成り立つ。
- 単位元の存在については、以下の通りである。

$\iota = -\dfrac{e}{d}$ とし、$d=0$ のとき $\iota = \infty$ とする。このとき $f(\iota) = \infty$ である。従って

$$x \oplus \iota = \frac{xf(\iota) - \iota f(x)}{f(\iota) - f(x)} = \frac{x - \iota\frac{f(x)}{f(\iota)}}{1 - \frac{f(x)}{f(\iota)}} = x.$$

- 任意の $k \in \overline{\mathbb{C}}$ に対しての逆元の存在は、$x \oplus k$ がメビウス変換であることによって保証されている。k を与え $m(x) = x \oplus k$ とし k の逆元 $k^{-1} = m^{-1}(\iota)$ とする。
- 可換であることは 2 次有理関数 $f(x)$ に付随する作用素 $\oplus$ の定義より明らかである。 ∎

注意 2
群 $(G, \oplus)$ は、リー群で *1* つか *2* つ穴の空いたリーマン球面への準同型写像を持つ。

2.5 作用素 $\oplus$ に関する反復列と Root finding algorisms

定義 6
列 $\{x_n\}$ を次のように定義する : $\quad x_1 = k,\ x_{n+1} = x_n \oplus k$
これを特に $k^{\oplus n}$ と表す: $\quad k^{\oplus 1} = x,\ k^{\oplus n+1} = k \oplus k^{\oplus n}$

定義 7
関数 f に対し *Newton* 法を適用した数列 $\{T_n\}$ を次のように定義する :

$$T_1 = k,\ T_{n+1} = T_n - \frac{f(T_n)}{f'(T_n)}$$

定義 8
関数 f に対し *Secant* 法を適用した数列 $\{S_n\}$ を次のように定義する :

$$S_0 = k,\ S_1 = m(k),\ S_{n+1} = S_n - f(S_n)\frac{S_n - S_{n-1}}{f(S_n) - f(S_{n-1})}$$

定義 9
シード (2, 3) で決まるフィボナッチ数列を $\{F_n\}$ とする。

定理 10
$f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ に付随する作用素 $\oplus$ は、次の関係式が成り立つ :

$$T_n = k^{\oplus 2^n} = x_{2^n},\ S_n = k^{\oplus F_n} = x_{F_n}$$

2.6 例

例 1

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ に付随する作用素 $\oplus$ の反復列は、　$k^{\oplus n}=nk.$

$$x\oplus y=\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}=\frac{x^2-y^2}{xy}\left(\frac{xy}{x-y}\right)=x+y.$$

例 2

$f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ に付随する作用素 $\oplus$ の反復列は、$k^{\oplus n}=k^n.$

$$x\oplus y=\frac{x\left(\frac{y}{y-1}\right)-y\left(\frac{x}{1-x}\right)}{\frac{y}{1-y}-\frac{x}{1-x}}=\frac{xy-x^2y-xy+xy^2}{y-xy-x+xy}=xy.$$

上の 2 つの例は、次のように一般化される。

定理 11

メビウス変換 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $ad-bc\neq 0$ に対して $x\oplus y$ は、次の形となる:

$$Axy+B(x+y)+C$$

証明

$$\begin{aligned} x\oplus y &= \frac{x\left(\frac{ay+b}{cy+d}\right)-y\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)}{\frac{ay+b}{cy+d}-\frac{ax+b}{cx+d}}=\frac{x(cx+d)(ay+b)-y(ax+b)(cy+d)}{(cx+d)(ay+b)-(ax+b)(cy+d)} \\ &= \frac{acxy(x-y)+bc(x^2-y^2)+bd(x-y)}{bc(x-y)-ad(x-y)}=\frac{1}{bc-ad}\{acxy+bc(x+y)+bd\} \end{aligned}$$

であるから

$$Axy+B(x+y)+C.$$

∎

定理 12

作用素 $\oplus$ に対して $x\oplus y=xy$, $x\oplus y=x+y$ を満たす関数 $f(x)$, $g(x)$ は、定数倍を除き次の関数に限る:

$$f(x)=\frac{x}{1-x},\ g(x)=\frac{1}{x}$$

証明 作用素 $\oplus$ の定義より　$\displaystyle\lim_{y\to x}x\oplus y=x-\frac{f(x)}{f'(x)},$

$x\oplus y=xy$ より　$x\oplus x=x^2$

であるから次の微分方程式を満たす:　$x^2=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

この微分方程式を解くと　$f(x)=C\dfrac{x}{1-x}.$

よって $x\oplus y=xy$ を満たす関数 $f(x)$ は、定数倍を除き $\dfrac{x}{1-x}$ に限る。

$g(x)$ も同様に証明される。

∎

3　作用素 $\oplus$ と関数方程式

定理 13

任意の $e \in \mathbb{C}$ に対しば 2 次有理関数 $f(x) = \dfrac{p(x)}{x-e} = \dfrac{ax^2+bx+c}{x-e}$ とし、群 $(G,\ \oplus)$ の単位元を ι とする。x の関数 $F(x)$ が

$$F'(x) = \frac{1}{p(x)},\ F(\iota) = 0$$

を満たすとき、2 次有理関数 $f(x)$ に付随する作用素 $\oplus$ と $F(x)$ は、次の関係式を満たす：

$$F(x \oplus y) = F(x) + F(y)$$

証明

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}F(x\oplus y) &= F'(x\oplus y)\frac{\partial}{\partial x}(x\oplus y) = F'(x\oplus y)\frac{p(x\oplus y)}{p(x)} \\ &= F'(x\oplus y)\frac{F'(x)}{F'(x\oplus y)} = F'(x)\end{aligned}$$

となる。このことより関数 G に対し　$F(x\oplus y) = F(x) + G(y)$.

作用素 $\oplus$ の定義より可換であることは明らかであるから

$$F(x\oplus y) = F(y\oplus x) = F(y) + G(x)$$

$$F(x) - G(x) = F(y) - G(y)$$

となる。この等式が成り立つのは、$F(x) - G(x) = F(y) - G(y)$ が定数のときのみである。

$$F(x) - G(x) = F(y) - G(y) = -c, \quad c: \text{定数}$$

とすると $G(y) = F(y) + c$ であるから

$$F(x\oplus y) = F(x) + G(y) = F(x) + F(y) + c.$$

$F(\iota) = 0$ より

$$x \oplus \iota = \frac{\iota F(y) - yF(\iota)}{F(y) - F(\iota)} = \frac{\iota F(y)}{F(y)} = \iota$$

となり y の値に関係なく　$\iota \oplus y = \iota.$

$y = \iota$ としても　$\iota \oplus \iota = \iota$

であるから $F(x\oplus y) = F(x) + F(y) + c$ に対し $x = \iota,\ y = \iota$ とすると

$$F(\iota \oplus \iota) = F(\iota) = 0$$

$$F(\iota) + F(\iota) + c = c$$

より　$c = 0.$

よって　$F(x\oplus y) = F(x) + F(y).$ ∎

関数 $m(x)$ に対して関数 $F(x)$ と $p(x) = ax^2 + bx + c$ は、よく知られている関数方程式の解である。

- 関数 $F(x)$ は、アーベル関数方程式の解である:

$$F \circ m(x) = F(x) + 1$$

- 2 次多項式 $p(x)$ は、ジュリア方程式の解である:

$$p \circ m(x) = p(x)m'(x)$$

命題 14
$\tanh^{-1} x$ は、$f(x)=\dfrac{-x^2+1}{-x}$ とする群 $(G,\ \oplus)$ 上の $(G,\ +)$ への準同型写像である:

$$\tanh^{-1}(x\oplus y)=\tanh^{-1}x+\tanh^{-1}y$$

証明 $p(x)=-x^2+1$ より $F(x)=\displaystyle\int\frac{1}{-x^2+1}\,dx=\tanh^{-1}x+C.$
$\iota=0,\ F(\iota)=0$ より $C=0.$
よって

$$F(x)=\tanh^{-1}x.$$

∎

命題 15
$\tan^{-1} x$ は、$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ とする群 $(G,\ \oplus)$ 上の $(G,\ +)$ への準同型写像である：

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}(x\oplus y)$$

証明 定理 13 を用いて証明できるが、正接の加法定理を用いて証明することもできる。
正接の加法定理より

$$\tan(X+Y)=\frac{\tan X+\tan Y}{1-\tan X\tan Y}.$$

両辺に $\tan^{-1}$ をとると

$$\begin{aligned}\tan^{-1}(\tan(X+Y)) &= \tan^{-1}\left(\frac{\tan X+\tan Y}{1-\tan X\tan Y}\right)\\ X+Y &= \tan^{-1}\left(\frac{\tan X+\tan Y}{1-\tan X\tan Y}\right)\end{aligned}$$

$\tan X=x\Leftrightarrow\tan^{-1}x=X,\ \tan Y=y\Leftrightarrow\tan^{-1}y=Y$ より

$$\begin{aligned}\tan^{-1}x+\tan^{-1}y &= \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\\ &= \tan^{-1}(x\oplus y).\end{aligned}$$

∎

参 考 文 献

[1] S. Northshield, On Iterates of Möbius Transformations on Fields. Math. Comp. Vol. 70, 2000, pp.1305 –1310.

[2] S. Northshield, Associativity of the Secant Method. Amer. Math. Monthly Vol. 109, 2002, pp.246 – 257.

[3] 西沢 清子, 尾身 和馬, Associative binary relation and rootfinding methods. 京都大学数理解析研究所講究録 1335 , 2003, pp.76 – 83